第 4 卷(A 版) 第 8 期
1999 年 8 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 4(A), No. 8
Aug. 1999

基于离散正交小波变换的图象去噪方法*

彭玉华
(山东工业大学电子系，济南 250061)

摘 要 给出了一种基于离散正交小波变换的图象去噪方法，该方法通过二维离散小波变换将图象投影到小波变换域，通过对小波变换系数进行阈值处理实现二维图象的去噪。并用实验验证了该方法的有效性。

关键词 离散正交小波变换 去噪 阈值处理

0 引 言

在传统的基于傅氏变换的信号去噪方法中，我们使得信号和噪声的频带重叠部分尽可能的小，这样就可以在频域通过时不变滤波方法将信号同噪声区分开。但是当它们的频域重叠时，这种方法就无能为力了。使用线性小波法或其它时间-频率或时间-尺度法，我们也可以通过选择不同基的方法，使得在相应坐标系统内，信号同噪声在时频域的重叠尽可能的小，然后将信号与噪声分离，但是，对多数信号来说，合适的基的选择本身就是一个难题。因此，使这种方法的应用受到了局限。

本文介绍的新的非线性方法是完全不同的。在这种方法中，信号和噪声的谱可以任意重叠。但是它们的幅度(而不是谱的位置)是尽可能的不同的。这就允许我们通过对变换系数的幅度进行一系列的处理(包括切削、域值处理、缩小幅度范围等)实现信号与噪声的分离。但是，这种非线性方法有效的前提是信号和噪声在变换域的幅度必须尽可能的不同。

由于离散正交小波变换(Discrete Orthogonal Wavelet Transform，以下我们简称 DWT)对信号具有一种“集中”的能力，使其在非线性处理领域具有很大的应用潜力，也使上述非线性滤波去噪的方法成为可能。下面我们就介绍一下基于 DWT 的非线性滤波在去除噪声方面的应用。

1 基于 DWT 的非线性滤波方法

基于 DWT 的非线性滤波的框图如图 1 所示。

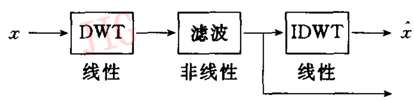


图 1 基于 DWT 的非线性滤波

我们首先介绍一下二维离散小波变换。

1.1 二维离散小波变换

本文采用张量积形式的二维小波基。其构造方式为：

设在 $L^2(R)$ 中已给定一个多尺度分析：

$$\{0\}\subseteq\cdots\subseteq V_1\subseteq V_0\subseteq V_{-1}\subseteq\cdots\subseteq L^2(R)$$

及相应的尺度函数 $\varphi(x)$ 极小波函数 $\Psi(t)$。令：

$$\tilde{V}_j=V_j\otimes V_j\quad j\in Z$$

其中符号 $\otimes$ 表示空间相乘。则由 $\varphi_{j,n}(x)=2^{-j/2}\varphi(2^{-j}x-n)$ 是 V_j 的标准正交基可知：$\{\varphi_{j,n}(x)\ \varphi_{j,m}(y)\}_{n,m\in Z}$ 是 $\tilde{V}_j$ 的标准正交基。

令 W_j 为相应尺度空间 V_j 的小波空间，即：

$$W_j\perp V_j$$

$$W_j\oplus V_j=V_{j-1}$$

则

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{j-1}&=V_{j-1}\otimes V_{j-1}=(V_j\oplus W_j)\otimes(V_j\oplus W_j)\\&=(V_j\otimes V_j)\oplus(W_j\otimes V_j)\oplus\\&\quad(V_j\otimes W_j)\oplus(W_j\otimes W_j)\\&=\tilde{V}_j\oplus\tilde{W}_j^1\oplus\tilde{W}_j^2\oplus\tilde{W}_j^3\end{aligned}$$

且 $\tilde{V}_j,\tilde{W}_j^1,\tilde{W}_j^2,\tilde{W}_j^3$ 两两正交。于是有：

$$\begin{aligned}L^2(R^2)&=\overline{\bigoplus_{j\in z}(\tilde{W}_j^1\oplus\tilde{W}_j^2\oplus\tilde{W}_j^3)}\\&=\overline{\mathrm{span}_{j,m,n\in z}\{\{\varphi_{j,n}(x)\Psi_{j,m}(y)\}}\end{aligned}$$

* 本文研究受山东省自然科学基金资助
收稿日期：1999-01-25；收到修改稿日期：1999-07-05

$$\overline{\bigcup\{\Psi_{j,n}(x)\varphi_{j,m}(y)\}}$$

$$\overline{\bigcup\{\Psi_{j,n}(x)\Psi_{j,m}(y)\}\}}$$

这就是 $L^2(R^2)$ 中的正交小波空间分解。其一尺度下的空间分解情况如图 2 所示。

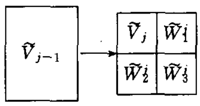


图 2　一尺度下的二维小波分解

将 $\tilde{V}_j$ 进一步分解，得到多尺度下的二维小波分解，如图 3 所示。

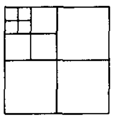


图 3　多尺度下的二维小波分解

下面我们再讨论将二维信号进行二维小波基展开的算法。

首先假定离散原始图象 $S^0_{i,l}(i,l=1,2,\cdots,N)$ 可近似为 0 尺度空间的剩余尺度系数序列，并且 h 和 g 分别为小波函数的低通和高通滤波器系数。以下是二维小波变换的分解公式：

$$\alpha^j_{i,l}=\sum_{k,m=1}^{N/2^{(j-1)}} g_k g_m s^{j-1}_{k+2i-2,m+2l-2} \tag{1}$$

$$\beta^j_{i,l}=\sum_{k,m=1}^{N/2^{(j-1)}} g_k h_m s^{j-1}_{k+2i-2,m+2l-2} \tag{2}$$

$$\gamma^j_{i,l}=\sum_{k,m=1}^{N/2^{(j-1)}} h_k g_m s^{j-1}_{k+2i-2,m+2l-2} \tag{3}$$

$$s^j_{i,l}=\sum_{k,m=1}^{N/2^{(j-1)}} h_k h_m s^{j-1}_{k+2i-2,m+2l-2} \tag{4}$$

其中上标 j 表示尺度，下标表示两个方向的位移，$\alpha^j_{i,l}$、$\beta^j_{i,l}$、$\gamma^j_{i,l}$、$s^j_{i,l}$ 分别对应小波空间 $\tilde{W}^3_j$、$\tilde{W}^2_j$、$\tilde{W}^1_j$ 及尺度空间 $\tilde{V}_j$ 的小波和尺度展开系数。显然，公式(1)、(2)、(3)、(4)也是一个塔形算法，其流程图如图 4 所示。其中，箭头所指量可由箭尾量经箭头所标滤波器滤波得到。

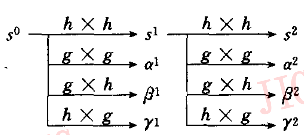
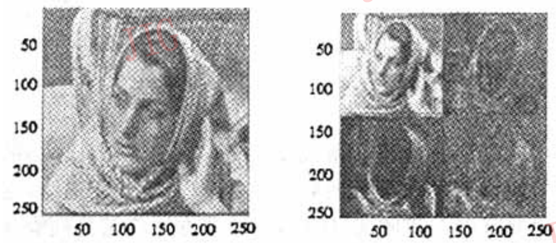


图 4　二维小波变换的算法图

1.2　去噪原理

由于小波函数在时频域都具有较好的局部性[1,2]，同时其变尺度特性使得小波变换对确定信号具有一种"集中"的能力。如果一个信号的能量在小波变换域集中于少数系数上，那么相对来说这些系数的取值必然大于在小波变换域内能量分散于大量小波系数上的信号或噪声的小波系数值。

由图 5(b)我们可看到，在小波变换域，信号的能量集中在几条亮线上，而大部分系数幅值近似为 0。而噪声同信号的小波变换系数分布规律相反，其系数均匀分布于整个尺度空间(或小波空间)，幅度相差不大，尤其是在大尺度情况下，由于大尺度对噪声进行了一定的平滑，使得噪声的小波变换系数很小。这正是本文非线性滤波方法所期望的。



(a) 原始图象　(b) 一尺度下的分解系数

图 5　离散图象的二维正交小波变换

因此，若对小波系数进行域值处理，就可以在小波变换域中去除低幅度的噪声和我们所不期望的信号，然后进行离散小波变换逆变换(Inverse Discrete Wavelet Transform，简称 IDWT)，尽管所恢复信号丢失了一点细节(对应小尺度时的幅度较小的小波变换系数)，但仍将恢复我们所期望的信号。因此，小波变换为我们提供了一种新的非线性去噪的方法。以下我们着重讨论一下在小波变换域通过域值化处理实现去噪的方法。

假设一个迭加了加性噪声的有限长信号可用下式表示：

$$y_i=x_i+\varepsilon n_i,\quad i=1,\cdots,N$$

我们的任务是从噪声污染信号 y 中恢复原始信号 x，这里我们采用矢量符号 x、y 表示 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$。W 为离散小波变换算子，X、Y 分别表示 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的离散正交小波变换，即：$X=Wx$，$Y=Wy$。

令 $\hat{X}$ 表示从 Y 中对 X 的估计，则去噪方法如下：

(1) 计算离散小波变换 $Y=Wy$。

(2) 在小波变换域对系数进行阈值处理。

$$\hat{X}=T_s(Y,t)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(Y)(|Y|-t), & |Y|\geq t\\ 0, & |Y|<t\end{cases}$$

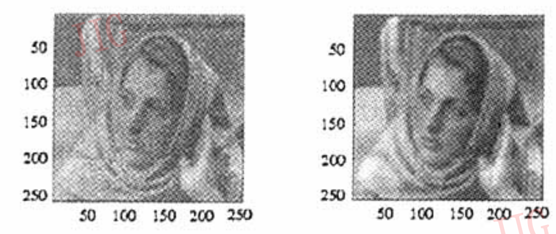
(3) 计算逆离散小波变换 $\hat{x}=W^{-1}\hat{X}$。

Donoho[5]等讨论了阈值选取的办法,从理论上给出并证明了在平方最小的前提下的阈值选取方法,将阈值取为:$\sigma\sqrt{2\log(n)/n}$,其中 σ^2 为噪声方差,n 为序列长度。

2　实验结果

下面我们给出一个使用二维离散小波变换进行去噪的例子。

图 6(a)所示为给图 5(a)图象加上一方差 $\sigma^2=900$ 噪声后的污染图象,其信噪比为 12.1,采用本文的非线性去噪处理方法,对污染图象的二维小波变换系数进行阈值处理(采用对称小波,分解尺度为 2),其中阈值选为 167,其结果示于图 6(b),去噪后图象的信噪比为 14.2。由图 6(b)及计算结果可知,噪声得到了很好的抑制。



(a) 噪声污染图象　　(b) 去噪图象

图 6　基于二维 DWT 的图象去噪

3　结　论

本文提出了一种非线性滤波去噪及数据压缩方法,这种方法之所以特别有效是由于离散小波变换具有系数的"集中"能力,使得我们可以对小波变换系数在幅度上进行阈值处理,去除那些小于某一阈值的系数,然后再将剩余系数进行 IDWT,这样可去除噪声并且得到较高的数据压缩比。这种非线性方法不仅可用于去噪,在数据压缩及分离信号方面也极其有利,有关这方面的研究正在进行中。

参 考 文 献

1　Burrus C S, Gopinath R A, Guo H T. Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms. Prentic Hall, Upper Saddle River, 1998.

2　Daubechies I. The wavelet transform: Time-frequency localization and signal analysis. IEEE Trans Theory, 36: 961～1005.

3　Mallat S G. Multifrequency channel decompositions of images and wavelet models. IEEE Trans Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989,37(12).

4　彭玉华等. 小波用于估测散射波波达时间及去噪. 电子学报, 1996,24(4).

5　Donoho D L. De-noising by soft-tresholding. IEEE Trans Information Theory, 1993,41(3).

彭玉华　1994 年毕业于西安交通大学电信学院,获工学博士学位。同年至山东工业大学任教。现为山东省高校中青年学术骨干学科带头人培养对象,山东省重点学科"信息与信号处理"信号处理方向学术带头人,副教授,中国电子学会高级会员。主要研究方向为小波分析,微波工程,语音及图象处理等。出版专著一本,发表论文几十篇。

Image Smoothing Method Based on Discrete Orthogonal Wavelet Transform

Peng Yuhua

(*Shandong University of Technology*, *Jinan* 250061)

Abstract　This paper studies an image smoother based on two-dimensional discrete orthogonal wavelet transform. By thresholding the wavelet transform coefficients of noisy images, the original image can be reconstracted correctly. Simulations show this de-noising method is valid.

Keywords　Discrete orthogonal wavelet transform, De-noising, Thresholding procession